

Pisa, Timss, Bildungsstandards, Tests – und wie sollen wir LehrerInnen damit umgehen?

Günter HANISCH, Universität Wien

Einerseits erhalten die Schulen immer größere Autonomie um ihren Mangel selbst zu verwalten, andererseits werden verschiedene Systeme der Output-Kontrolle installiert. Dies nicht nur von staatlichen Stellen sondern auch von privaten, wie verschiedene Eignungstests, bei denen unter anderem auch Mathematikkenntnisse abgefragt werden, zeigen. Soll sich der Mathematikunterricht darauf einstellen und wenn ja wie? Welche Probleme könnten sich dadurch ergeben, welche Unterstützungsmaßnahmen sollten eingefordert werden?

Solche bildungspolitischen Probleme lassen sich aus verschiedener Sicht betrachten. Hier sollen folgende drei Sichtweisen herausgegriffen werden, wobei die beiden ersten nur kurz besprochen werden sollen und das Hauptaugenmerk auf dem letzten Punkt liegen soll:

1. dienstrechtlich
2. national
3. pädagogisch

Aus dienstrechtlicher Sicht können wir uns auf die offiziellen Tests beschränken, also auf: internationale Tests (Pisa, Timms, ...) und die nationalen Bildungsstandards. Erstere sind dienstrechtlich uninteressant, da die Leistungen zu einem Zeitpunkt gemessen werden, wo die SchülerInnen meist in anderen Klassen und oft auch in anderen Schulen sitzen. Die Bildungsstandards treffen uns auch nur wenig, da aus Geldmangel nur sehr selten getestet werden wird und es sich um eine Querschnittsuntersuchung und keine Längsschnittsuntersuchung handelt. Es gibt etwa in Wien nun einmal Schulen, die den Ruf haben besonders schwer zu sein, so dass sich dort die leistungsmäßig stärkeren SchülerInnen häufen, und dann gibt es auch solche, wo das beste didaktische Können der Unterrichtenden nicht ausreicht um den Leistungsvorsprung der ersteren auszugleichen. Beide miteinander zu vergleichen wäre sinnlos! Daher können aus dienstrechtlicher Sicht keine Folgen erwartet werden.

Um das Problem aus nationaler Sicht zu sehen machen wir ein Gedankenexperiment: Angenommen die Bevölkerung könnte entscheiden und wir stecken alle Ressourcen in eines der beiden Ziele: (1) Österreich wird Pisa-Weltmeister oder (2) Österreich wird Fußballweltmeister. Wie werden sich Österreichs BürgerInnen entscheiden? Eben! So wichtig sind die Pisa-Testergebnisse.

Allerdings gibt es aber schon die Möglichkeit mit relativ wenig Aufwand die Pisa-Testergebnisse zu verbessern und zwar durch etwas, was bei fast allen Fertigkeiten zur Verbesserung führt, nämlich durch Trainieren. Und schaut man sich die Pisa-Aufgaben an, dann fallen formal folgende Punkte auf:

1. Pisa Aufgaben haben im Allgemeinen viel Text
2. Pisa Aufgaben sind teilweise Multiple-Choice-Aufgaben
3. Der Pisa-Test dauert länger als eine Unterrichtseinheit

Daraus folgt nun, dass die SchülerInnen einerseits mathematische Texte lesen können sollen, weiters wissen sollen, wie man mit Multiple-Choice-Aufgaben umgeht, wobei Raten und Probieren eine sinnvolle Strategie sein kann, und auch daran gewöhnt werden sollten, sich länger als eine Unterrichtseinheit mit Mathematik zu befassen.

Betrachten wir nun das Problem aus pädagogischer Sicht. Ist es pädagogisch verantwortungsvoll die SchülerInnen auf das Lösen von Testaufgaben vorzubereiten? Betrachtet man die veröffentlichten Pisa-Aufgaben und die zu den Bildungsstandards, ist offenbar, dass es sich um aus didaktischer Sicht im Allgemeinen vernünftige Aufgaben handelt. Oder anders ausgedrückt: Ich wäre froh, wenn die von mir unterrichteten SchülerInnen so gut Mathematik beherrschten, dass sie diese Aufgaben lösen könnten.

Auf die von Firmen, Schulen ... gestellten Testaufgaben soll im Folgenden eingegangen werden. Vorerst aber noch eine wichtige Bemerkung: Pisa, Bildungsstandards oder sonstige Aufgaben sind nicht alles, denn wir betreiben Mathematik auch, aus anderen Gründen:

1. Gehirntraining (trainiert verschiedene Fähigkeiten)
2. Bildungsgut
3. Schönheit
4. Freude
5. nützlich (für das Leben, für das Studium, für den Beruf)

und darauf soll im Folgenden exemplarisch eingegangen werden (exemplarisch deswegen, da dies der Artikel von REICHEL und RESEL (2002) behandelt, in dem auch weiterführende Literatur zu diesem Thema angegeben wird).

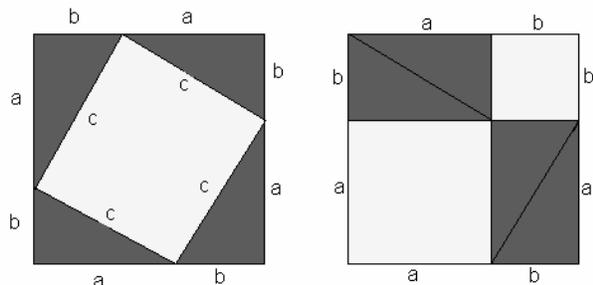
Für Gehirntraining und Bildungsgut sollen drei Philosophen des Altertums sprechen:

„Hast du nicht bemerkt, dass diejenigen, die im Rechnen unterrichtet wurden, sollten sie auch sonst nichts davon gehabt haben, so doch das, dass ihre Denk- und Redegewandtheit viel besser ist, als sie es vorher war?“ (SOKRATES zu seinem Gesprächspartner Glaukon)

„ageômetrêtos mêdeis eisitô!“ (Niemand trete hier ein, der nichts von Geometrie versteht.) (PLATO)

„Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.“ (ARCHIMEDES)

Bezüglich der Schönheit der Mathematik soll ein Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes gebracht werden, der an Schönheit und Klarheit wohl schwer zu übertreffen ist. Man sieht einfach, dass der Flächeninhalt des linken Quadrats gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden rechten Quadrate ist.



Dass die Beschäftigung mit Mathematik Freude bereiten kann und dass es unsere Aufgabe ist, die uns anvertrauten SchülerInnen an dieser Freude teilhaben zu lassen, wird wohl außer Streit gestellt werden können. Ob und wie dies allerdings gelingt, wäre ein eigenes Referat.

Die Nützlichkeit der Mathematik für den Einzelnen (für die Allgemeinheit ist das sowieso offensichtlich, denn ohne Mathematik, gäbe es nicht die Technik, die Medizin, die Verwaltung, ..., die wir kennen. Überlegen Sie einmal mit Ihren SchülerInnen, was wäre, gäbe es keine Zahlen mehr!) hängt ab, wofür sie gebraucht werden soll:

1. für das tägliche Leben: in der Unterstufe teilweise ja, in der Oberstufe sehr fraglich
2. für das Studium: eine Reihe von Studien hat Mathematik als Pflichtfach, wie TU, BOKU, VET.MED., NAWI, WU, Psychologie

3. für den Beruf: das hängt ab, um welchen Beruf es sich handelt. Aber die dafür notwendigen Mathematikkenntnisse sind im Allgemeinen weniger, als die beim Studium verlangten.
4. bei Aufnahmeprüfungen: Darauf soll im Folgenden eingegangen werden.

Die hier vorgestellten Tests stammen zum Teil aus Internetrecherche und zum Teil handelt es sich um Originaltests, die von Firmen gestellt wurden, aber allerdings leicht verändert wurden. Insbesondere dahingehend, dass der Name der Firma nicht mehr aufscheint. Daher fehlt auch die Quellenangabe, aber es handelt sich um bedeutende Betriebe mit über 1000 Beschäftigten. Die Originale sind zum Teil in Farbe und die Formatierung wurde, um Platz zu sparen, verändert.

Aufnahmeprüfungen über den Stoff der Unterstufe:

Aufnahmeprüfungen für ORG

Aufnahmeprüfung ORG (BORG Monsberger Monsbergergasse 16, 8010 Graz)

- 1) Vereinfache: $(3x - 4y)^2 - (3x + 4y)(3x - 4y) =$
- 2) Löse die Gleichung in G = R: $5(2 - x) - 3(5 + 2x) = 2x$
- 3) Subtrahierst du vom Drittel einer Zahl das Viertel dieser Zahl, so erhältst du 5. Berechne die Zahl!
- 4) Im Jahr 2010 wird es in Österreich über 2,5 Millionen Pensionisten geben. Das sind 26,7 % aller Bewohner. Wie viel Millionen Österreicher gibt es 2010?
- 5) Jemand kauft im Abverkauf ein Skiset um 25 % verbilligt und bezahlt dafür 225 Euro. Wie hoch war der reguläre Preis?
- 6) Eine regelmäßige, quadratische Pyramide hat die Seitenkante $s = 15$ cm und die Höhe $h = 12$ cm. Berechne das Volumen der Pyramide!

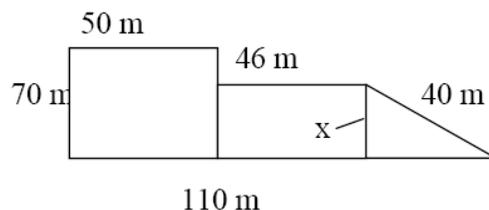
Aufnahmeprüfung (BORG Hermagor)

- 1) a) $1 \frac{1}{2}$ kg Äpfel kosten € 3,--. Wie viel kosten $2 \frac{1}{3}$ kg?
 b) Teilt man eine Torte in 8 gleiche Stücke, so wiegt jedes 20 dag; teilt man sie in 10 gleiche Stücke, so wiegt jedes wie viel dag?
 c) Von wie viel € sind € 20,-- genau 16%?
 d) 3km^2 41 ha $7a =$? m^2 ; $211\text{g} =$? kg ; $72\text{cm}^3 =$? Liter

2) Berechne x und mache die Probe: $\frac{5x-11}{6} - \frac{9-3x}{4} = 4 + \frac{7x-13}{3}$

3) a) $(\frac{1}{2}x + 3y)^2 =$ b) $(3b-a) \cdot (3b+a) =$ c) $1 - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{12}} =$ d) $\frac{12x^3y + 12x^2y^2}{3x^2y^2 + 3xy^3} =$

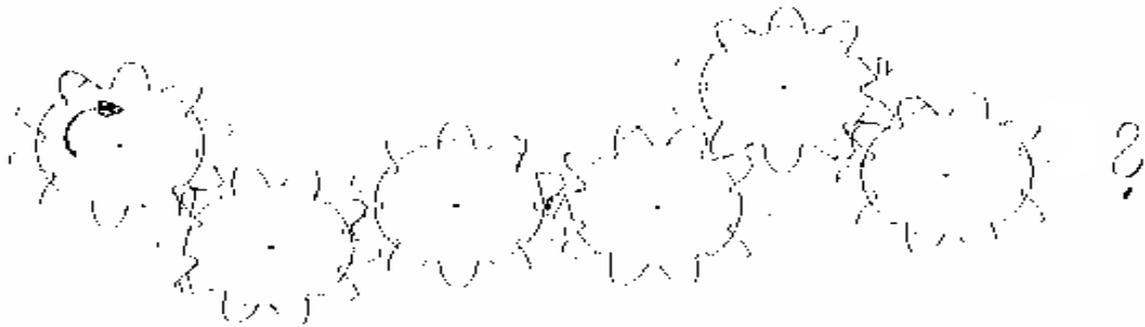
- 4) Berechne die Strecke x und die Fläche folgender Figur!



Aufnahmsprüfung für einen technischen Betrieb

1) Bitte lösen Sie folgende Textaufgaben:

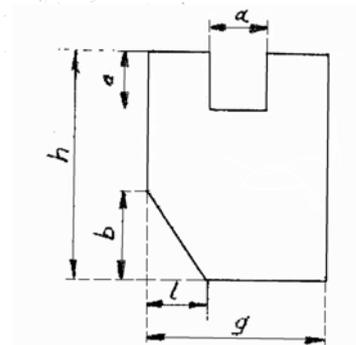
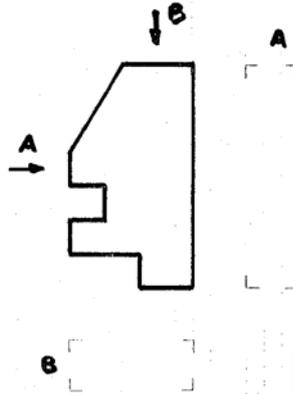
- Das Gehalt eines Angestellten beträgt nach einer Erhöhung um 10 % € 2.200,-. Wie hoch war das Gehalt vor der Erhöhung?
 - Ein Treibstoffvorrat reicht für 3 Motoren für 60 Tage. Wie lange reicht er für 1 Motor?
 - Der Rechnungsendbetrag für eine Rechenmaschine beträgt brutto € 66,-. Wie viel beträgt der Nettopreis, wenn 20 % MWSt. zu berücksichtigen sind?
- 2) Setzen Sie jeweils die Zahl in die Klammer ein, mit der sich die Zahlenreihe logisch fortsetzen lässt. Beispiel 2, 4, 6, (8)
- 3, 6, 9, ()
 - 3, 6, 5, 10, 9, ()
 - 288, 144, 148, 74, 76, ()
 - 1, 4, 9, 16, ()
- 3) In welche Richtung dreht sich das letzte Zahnrad? (Mit Pfeil einzeichnen!)



- 4) Zeichne die fehlenden zwei Ansichten!
- 5) Berechne das Gewicht eines Stahlwürfels mit 40 mm Seitenlänge in kg! (Spezifisches Gewicht von Stahl = 7,8 kg/dm³)
- 6) Wie errechnet sich die Größe x nach folgender Formel?

$$a = \frac{b \cdot x \cdot y}{500}$$

- 7) Wie groß ist der Umfang eines Kreises von 1 m Durchmesser in cm?
- 8) Stelle die Formel auf und berechne den Flächeninhalt in cm²! g = 60 mm h = 80 mm l = 20 mm b = 30 mm a = 20 mm
- 9) 5 m² Blech kosten € 60,-. Wie viel kosten 5 m² bei 20% Rabatt?
- 10) Setze die logischen Zahlenreihen bis über 15 fort:
- 1 4 6 7 10
 - 3 7 5 6 7 5 ...



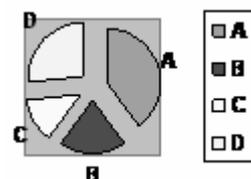
Aufnahmsprüfungen für kaufmännische Betriebe

1) Eine Kundin bezahlt folgende Waren:

1 Stück Nagellack	Preis pro Einheit ... € 1,49
5 Stück Babygläschen	Preis pro Einheit ... € 1,09
1 Stück Wollwaschmittel	Preis pro Einheit ... € 1,79

Berechnen Sie die Summe! Die Kundin bezahlt mit einem 50,- Euroschein. Wie viel Wechselgeld bekommt sie zurück?

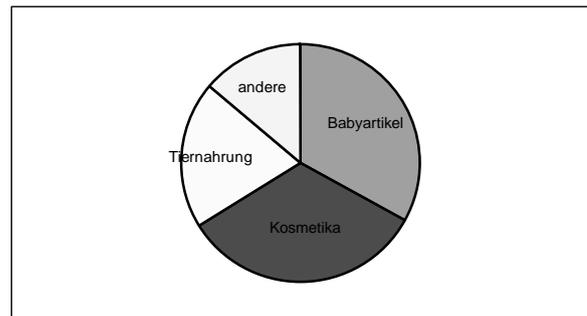
- 2) Daneben sehen Sie einen geteilten 100% Kreis. Welches Stück hat 20 %?



- 3) Eine Verkäuferin möchte ihre Abteilung mit Faschingsgirlanden dekorieren. Die Abteilung ist 22 Meter lang und es sollen mindestens 3 Bahnen Girlanden aufgehängt werden. Eine Girlande ist 15 Meter lang. Wie viele Girlanden braucht sie?
- 4) Die Filialleiterin bekommt eine Lieferung mit 50 Stück Lippenstiften. Die Rechnungssumme beträgt € 66,50. Wie viel kostet ein Lippenstift?
- 5) 4 Arbeiter verdienen € 240,-. Wie viel verdienen unter gleichen Bedingungen 14 Arbeiter?
- 6) Wie viel Stück einer Ware erhält man für € 300,-, wenn 20 Stück € 600,- kosten?
- 7) Frau Petra Lustig geht in ein Reisebüro und bucht eine 4-wöchige Reise nach Burma. Sie erhält € 66,- Rabatt, dies entspricht einem Rabattsatz von 3 %. Wie hoch war der Gesamtpreis der Reise?
- 8) Eine Kundin bekommt 2% Skonto auf einen Einkaufsbetrag von € 60,-. Wie groß ist der Betrag, den sie an der Kassa zahlen muss?
- 9) Drei Shops erzielten folgende Jahresumsätze:
 - a. Shop 1: € 160.000,-
 - b. Shop 2: € 220.000,-
 - c. Shop 3: € 120.000,-

Welchen prozentuellen Anteil hat jeder einzelne Shop gemessen am Gesamtumsatz?

- 10) In welchem dieser Zahlenpaare ist 32 größer als die erste Zahl, aber kleiner als die zweite Zahl? 20 und 30; 30 und $62/2$; $32/2$ und $130/4$; $160/4$ und 50;
- 11) Welche dieser Aussagen trifft auf das Diagramm zu?
 - a) Es werden mehr Babyartikel als Kosmetika verkauft.
 - b) Die Babyartikel machen mehr als die Hälfte des Gesamtumsatzes aus.
 - c) Tiernahrung macht weniger als ein Drittel des Gesamtumsatzes aus.
 - d) Es werden mehr Kosmetika verkauft als Babyartikel und Tiernahrung zusammen.



Weitere Aufnahmeprüfung für einen kaufmännischen Betrieb

- 1) Eine Stammkundin kauft um € 20 ein und bekommt 10 % Kundenrabatt. Wie viel muss sie bezahlen?
- 2) Ein Kunde kauft eine Packung mit 100 Servietten um 2 Euro. Wie viel kostet eine Serviette?
- 3) Eine Kundin bezahlt folgende Waren: Shampoo (€ 2,50), Haarspray (€ 2,90), Haargel (€ 1,90) mit einem 50,- Euroschein. Wie viel Wechselgeld bekommt sie?
- 4) Für den Umbau der Filiale brauchen 3 Mitarbeiter 6 Tage. In wie vielen Tagen ist der Umbau abgeschlossen, wenn noch 6 Kolleginnen mithelfen?
- 5) Eine Zahnpastatube reicht für 16 Personen 24 Tage aus. Wie viele Tage können sich 8 Menschen die Zähne putzen?
- 6) Bei der Lieferung vom Verteilzentrum erhalten sie rote und grüne Kerzen. $1/3$ sind grün, 12 sind rot. Wie viele Kerzen sind es insgesamt?
- 7) Du möchtest die Filiale mit Faschingsgirlanden dekorieren. Die Filiale ist 25 m lang und es sollen mindestens 3 Bahnen Girlanden aufgehängt werden. 1 Girlande ist 18 m lang. Wie viele Girlanden brauchst du?
- 8) Setze die folgende Zahlenreihe fort... 18, 14, 11, 9... die nächste Zahl ist:

Und noch eine Aufnahmeprüfung:

- 1) Eine preisreduzierte Ware kostet 8 Euro. Um wie viel Prozent ist die Ware nun billiger, wenn sie zuvor 10 Euro gekostet hat?
- 2) Eine Rechnung lautet auf 42 Euro. Wie viel ist zu bezahlen, wenn 10% vom Rechnungsbetrag abgezogen werden.
- 3) Eine Kundin möchte 100 Bleistifte kaufen. Im Geschäft gibt es nur 4 Packungen zu je 5 Bleistiften. Wie viel Packungen (zu je 5 Bleistiften) musst du für die Kundin vom Lager holen?

Analysieren wir kurz das von den einzelnen Institutionen Verlangte, wobei allerdings bedacht werden muss, dass es bei den Aufnahmsprüfungen von Firmen eher um Abgänger einer Hauptschule geht:

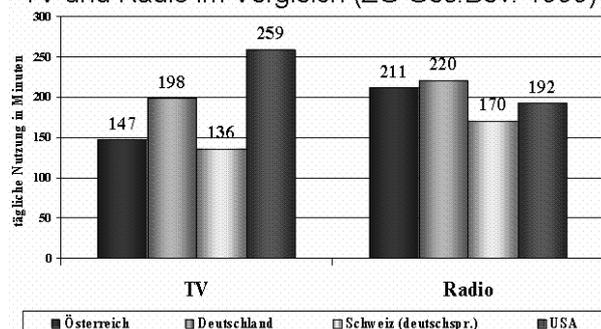
1. Die Aufnahmsprüfungen an ein ORG gleichen in etwa dem üblichen Schulstoff.
2. Prozentrechnungen kommen überall vor
3. Ebenfalls findet man überall einfache Schlussrechnungen
4. Geometrie wird nur bei technischen Firmen verlangt
5. Interpretieren von Grafiken und Tabellen kommt bei kaufmännischen Firmen vor
6. Intelligenztests sind ebenfalls eingebaut
7. Interessant ist auch, was von den Firmen nicht abgefragt wurde: etwas schwierigere Algebra, Winkelumrechnungen, Teilbarkeit, ...

Aufnahmsprüfungen über den Stoff der Oberstufe und darüber hinaus:

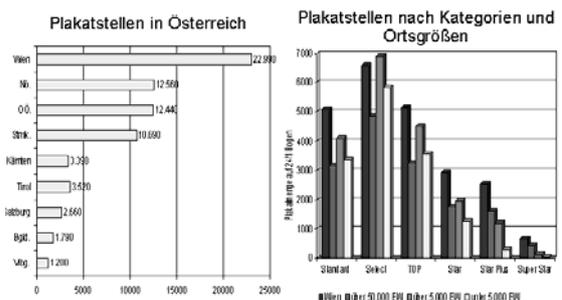
Aufnahmsprüfung FHS

1. Ein Kerzenhersteller weiß, dass er aus sechs Kerzenresten wieder eine ganze neue Kerze herstellen kann. Er hat 600 Kerzenreste. Wie viele neue Kerzen kann er daraus insgesamt erzeugen, wenn bei der Herstellung jeder Kerze ein neuer Rest übrig bleibt?
2. Eine Aktie am Neuen Markt hat seit Ihrer Emission 75% an Wert verloren. Welche durchschnittliche Jahresperformance benötigt sie um in zwei Jahren wieder beim Emissionskurs zu stehen?
3. Ein Riemenantrieb läuft mit der Riemengeschwindigkeit $v = 20$ m/s. Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn die Drehzahl der Scheibe um $1/5$ erhöht wird?
4. Lösen Sie folgende Rechenaufgaben im Kopf. Ziehen Sie das kleinere Ergebnis vom größeren ab?
 a) $8+2-4=?$ $7-5+2=?$ b) $9+6-4=?$ $2+9+2=?$
5. Welche Zahl folgt der Zahlenreihe logisch: 3, 8, 23, 68, 203, ...
6. Welche der folgenden Aussagen lässt bzw. lassen sich aus dem linken Diagramm ableiten?
 a) In Österreich und in der Schweiz liegt der Radio-Konsum über dem Durchschnitt.
 b) TV wird stärker genutzt als Radio.
 c) In den USA ist der Unterschied zwischen TV und Radiokonsum relativ am höchsten.
 d) In Deutschland wird ein Radiospot am ehesten gehört.

Durchschnittliche tägliche Nutzung in Minuten von TV und Radio im Vergleich (ZG Ges. Bev. 1999)



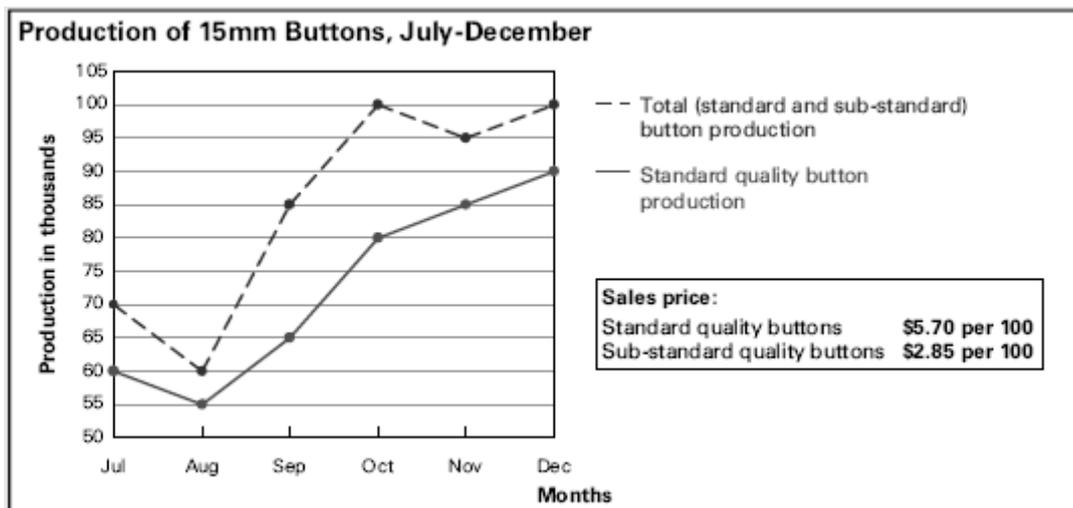
Die österreichische Plakatlandschaft



7. Welche der folgenden Aussagen lässt bzw. lassen sich aus dem rechten Diagramm ableiten?
- Mit 10000 Plakaten kann man 4 Bundesländer komplett verplakatieren.
 - Mit 24000 Plakaten kann man 50% der Plakatflächen in den 3 plakatstärksten Bundesländern verplakatieren.
 - Von 1 Plakatkatgorie gibt es weniger als 5000.
 - Von 3 Plakattypen gibt es mehr als 10000.

Postuniversitäre Aufnahmeprüfung (etwa Morgan-Stanley)

Population Structure 1985	Population at start of year (millions)	Live Births per 1000 population (Jan-Dec)	Deaths per 1000 population (Jan-Dec)	Percentage of population at start of year aged	
				under 15	60 or over
UK	56.6	13.3	11.8	19	21
France	55.2	13.9	10.0	21	19
Italy	57.1	10.1	9.5	19	19
West Germany	61.0	9.6	11.5	15	20
Spain	38.6	12.1	7.7	23	17



- Which country had the highest number of people aged 60 or over at the start of 1985?
 A UK B France C Italy D W. Germany E Spain
- What percentage of the total 15mm button production was classed as sub-standard in September?
 A 17.5% B 20% C 23.5% D 27.5% E 28%
- How many live births occurred in 1985 in Spain and Italy together (to the nearest 1000)?
 A 104,000 B 840,000 C 1,044,000 D 8,400,000 E 10,440,000
- What was the net effect on the UK population of the live birth and death rates in 1985?
 A Decrease of 66,700 B Increase of 84,900 C Increase of 85,270 D Increase of 752,780 E Cannot say

5) By how much did the total sales value of November's button production vary from October's?

A	B	C	D	E
\$28.50	\$142.50	\$285.00	\$427.50	No
(Decrease)	(Decrease)	(Increase)	(Decrease)	change

6) What was the loss in potential sales revenue attributable to the production of sub-standard (as opposed to standard) buttons over the 6 month period?

A	B	C	D	E
\$213.75	\$427.50	\$2,137.50	\$2,280.00	\$4,275.00

Als Resümee kann man den Schluss ziehen, dass nach Meinung der Firmen die Schwerpunkte des Unterrichts anders gewichtet werden sollten. Das, was verlangt wird, ist aber vom didaktischen Standpunkt vernünftig. Es widerspricht daher nicht dem pädagogischen Ethos, Pisa, Bildungsstandards und Aufnahmeprüfungen im Unterricht einen gewissen Raum zu widmen.

Hilfen für die Vorbereitung und die Durchführung des Unterrichts

Möchten LehrerInnen das tun, dann brauchen sie für die Vorbereitung und die Durchführung des Unterrichts Hilfen und zwar organisatorische (wie zumindest eine doppelte Unterrichtseinheit ab der 8. Schulstufe) und lehrbuchmäßige wie

- PISA- und Bildungsstandard-Aufgaben im Lehrbuch
- Interessante „mathematische“ Geschichten, um zum Lesen anzuregen
- Aufgaben, die auch Mädchen interessieren, da diese bei Pisa schlechter abgeschnitten haben
- Hilfen bei der Unterrichtsdurchführung um den SchülerInnen individuelle Aufgaben zu stellen
- Probieren als legitime Methode zu unterrichten
- Grafische Darstellungen und Tabellen

Wie könnte nun ein Lehrbuch aussehen, das obige Vorgaben erfüllt:

1) Original Pisa- bzw. Bildungsstandardaufgaben müssen enthalten und extra gekennzeichnet sein. Um individuellen Unterricht leichter zu ermöglichen sollen die Lösungen im LehrerInnenband am Rand bei der Aufgabe stehen:

595 12 600 ZAR



595 Die folgende Aufgabe „WECHSELKURS“ stammt aus der PISA-Aufgabensammlung und wurde 2003 gestellt:

Mei-Ling aus Singapur wollte für 3 Monate als Austauschstudentin nach Südafrika gehen. Sie musste einige Singapur Dollar (SGD) in Südafrikanische Rand (ZAR) wechseln.

Frage 1: Mei-Ling fand folgenden Wechselkurs zwischen Singapur Dollar und Südafrikanischen Rand heraus:

$$1 \text{ SGD} = 4,2 \text{ ZAR}$$

Mei-Ling wechselte zu diesem Wechselkurs 3000 Singapur Dollar in Südafrikanische Rand. Wie viele Südafrikanische Rand hat Mei-Ling erhalten?

2) Da aus Untersuchungen bekannt ist, dass sich Mädchen besonders für Tiere und Kleinkinder interessieren, sollen Aufgaben, die diese betreffen, zahlreich vorhanden sein:

437 a)

$$\begin{aligned}(7z + 5w + 5m) - \\(4z + 3w + 4m) = \\ \dots = 3z + 2w + m, \\ \text{also wurden } 3 \\ \text{Zwerghasen, } 2 \\ \text{Wellensittiche und} \\ \text{1 Meerschwein-} \\ \text{chen verkauft; b)} \\ (7z + 5w + 7m) - \\ (4z + 3w + 4m) = \\ \dots = 3z + 2w + 3m,\end{aligned}$$

437 Sara und Tom besuchen etwa einmal in der Woche eine Tierhandlung um sich die Tiere anzuschauen.



Letzte Woche waren 7 Zwerghasen, 5 Wellensittiche und a) 5 b) 7 Meerschweinchen zu verkaufen. Eine Woche später waren nur mehr 4 Zwerghasen, 3 Wellensittiche und 4 Meerschweinchen da. Schreibe das „mathematisch“ an und berechne wie viele Tiere jeder Art verkauft wurden!

den!

Was musst du voraussetzen, damit du die Rechnung durchführen kannst?

7.3 Wie schwer ist es? – Massenmaße



Sara und Tom besuchen mit ihren Eltern eine gut befreundete Familie. Deren jüngstes Familienmitglied ist ein 8 Tage altes Baby. Es wird täglich gewogen und die Werte werden in eine Tabelle eingetragen. Sara und Tom sind fasziniert von den kleinen Händen und helfen gerne mit. Sara legt

ein Handtuch auf die Waage, schaltet sie ein und die Anzeige der Waage zeigt „0.00“. Tom legt das Baby drauf, die Mutter des Babys steht schon mit Bleistift und Tabelle bereit: „Wie viel? Was soll ich eintragen?“ „3.95“ zeigt die Waage an. Tom ist unsicher.

Bei vielen elektronischen Geräten wird im Display statt dem Komma ein Punkt angezeigt. Das liegt daran, dass in vielen Ländern statt dem Komma ein so genannter Dezimalpunkt geschrieben wird. Abgesehen davon, geht man überall auf der Welt gleich mit Dezimalzahlen um! Die Einheit wird deshalb oft weggelassen, weil Personenwaagen – auch bei ganz kleinen Personen – immer Kilogramm anzeigen. Das Baby, das Tom abgewogen hat, wiegt also 3,95 kg.

- 3) Des Weiteren sollen die Aufgaben so gestellt sein, dass sie auch Mädchen interessieren. Das kann etwa dadurch geschehen, dass ein Mädchen von den SchülerInnen durch das Buch begleitet wird:

6.1 Sara hat ein Problem

Sara blättert wieder einmal in ihrem Mathematikbuch. Das tut sie öfters, weil sie Mathematik mag. Mathematik ist sehr logisch und darüber nachzudenken macht ihr Spaß. Die Aufgabe 8 auf S. 11 geht ihr nicht aus dem Sinn. Sie fragt ihren Bruder: „Tom, kannst du mir das erklären. In der Aufgabe 8 denkt man sich eine Zahl, addiert 5 dazu und verdoppelt das Ergebnis! Dann subtrahiert man davon das Doppelte der ursprünglichen Zahl, zieht dann 9 ab und erhält immer 1. Wie funktioniert das?!“ Tom denkt darüber nach, aber auch ihm fällt keine Lösung ein.

6.3 Nun werden wir Detektive

Nachdem Sara weiß, warum bei Aufgabe 8 immer dieselbe Lösung heraus kommt, hat sie sich eine neue Art von Rätsel einfallen lassen und gibt sie gleich ihrem Bruder Tom auf: „Tom, ich kann erraten, was du dir denkst!“ „Gibt es nicht“, sagt Tom. „Doch“ sagt Sara. „Denk dir eine Zahl, zähle 3 dazu, multipliziere mit 2 und zieh' 6 ab. Wie heißt die Zahl?“ „8“ sagt Tom. „Du hast dir 4 gedacht!“ „Das war Zufall, ich denk mir jetzt eine andere Zahl“ sagt Tom. „Gut“ und Tom rechnet wieder und erhält jetzt 14. „Du hast dir 7 gedacht“. Tom ist verblüfft. Langsam wird ihm seine Schwester unheimlich.

Wie macht Sara das? Denke nach, welchen Trick sie anwendet!

Tipp 6.5

Zum Aufstellen der Gleichung musst du wie ein Detektiv vorgehen und den Text genau analysieren. Erst dann kannst du ihn „mathematisch“ hinschreiben. Und dann musst du durch geschicktes Umformen die Unbekannte „in die Enge treiben“ und entlarven!

- 4) Und schließlich sollten auch Aufgaben vorkommen, die zum geschickten Probieren anregen. Dazu gehören auch Intelligenztestaufgaben:

6.4.2 ★ Probieren geht über Studieren – Für Tüftler

Bei manchen Aufgaben muss man Probieren und geschicktes Denken miteinander kombinieren. Solche Aufgaben findest du oft in den Rätselcken von Zeitungen:

Jeder Buchstabe steht für eine andere Ziffer. Wie heißt die Rechnung?

	S	O	N	N	E	
+	S	T	R	A	N	
	F	E	R	I	E	

Lösung:
 Aus der 1. Spalte folgt: $S+1=F$.
 Aus der 3. Spalte: Entweder ist $O+R=R$ oder $O+R+1=R$. Daher muss O 0 oder 9 sein.
 Wenn $O=0$ ist, dann ist $S+T=E+10$. Ist aber $O=9$, dann ist $S+T+1=E+10$.
 Vergleicht man die 5. und die 6. Spalte, erkennt man, dass ein Übertrag auftreten muss, es ist also $E+D=N+10$ oder $N+N=E+10$.
 Mit dem Probieren wird man bei N anfangen, wobei 0 und 9 nicht in Frage kommen. Für $N=1$ und $N=7$ erhältst du Lösungen:

40113	oder	59774
492671		581273
<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> 532731		<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> 641047

Oder Aufgaben wie die folgenden, die auf Intelligenztests vorbereiten:

21 Finde die nächsten zwei Zahlen!

- a) 2, 3, 2, 3, () b) 1, 5, 2, 5, 3, 5, ()
c) 2, 3, 4, 4, 6, 5, () d) 2, 3, 1, 5, 2, 7, ()

21 a) 2, 3, b) 4, 5,
c) 8, 6, d) 1, 9

22 Finde die nächste Zahl!

- a) 3, 6, 5, 10, 9, () b) 288, 144, 148, 74, 76, ()
c) 1, 4, 5, 8, 9, () d) 3, 7, 5, 6, 7, 5, ()

22 a) 18, b) 38, c)
12 d) 9

Und einige funktionieren nach ganz anderen Gesetzen. Vielleicht findest du sie heraus.

23 Setze die Zahl in die Klammer ein, mit der sich die Zahlenfolge logisch fortsetzen lässt!

- a) 1, 4, 9, 16, () b) 1, 8, 27, 64, ()
c) 1, 2, 3, 4, 3, 2, () d) 2, 5, 7, 9, 7, 5, ()

23 a) 25, b) 125, c)
1, d) 2

Aber auch in den schon vorhandenen Lehrbüchern (siehe etwa GÖTZ-REICHEL Bd. 6) findet man passende Aufgaben, sofern man sie nicht nach Schema löst: So ist in Aufg. 396a) $3x + 7$ für $x = 3$ eine Quadratzahl und die Probe, die man leicht im Kopf rechnen kann, zeigt, dass dies die Lösung ist. (Es sind mehrere Aufgaben angegeben, damit Stoff zum Üben vorhanden ist.) Gerade dieses Vorgehen, das meist im Unterricht nicht üblich ist, entspricht aber auf einer höheren Ebene der Hochschulmathematik, wo ein Satz kühn vermutet und dann scharf geprüft wird, und andererseits kann es ein geeignetes Verfahren sein Multiple-Choice-Aufgaben zu lösen.

396 Wie Aufg. 395!

a) $\sqrt{28 - 3\sqrt{3x+7}} = 4$ b) $\sqrt{33 - 2\sqrt{3x+4}} = 5$

397 Wie Aufg. 395!

a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+12} = \sqrt{4x+33}$ b) $\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{8x+1}$

c) $3\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-7} = \sqrt{x+8}$ d) $2\sqrt{x+2} + 5\sqrt{x-1} = \sqrt{49x-17}$

e) $3\sqrt{x+13} + 4\sqrt{x-2} = \sqrt{49x+109}$ f) $5\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x+11} = 2\sqrt{16x+41}$

398 Wie Aufg. 395!

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7} = \sqrt{x+34} - \sqrt{x+2}$ b) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+12} = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+32}$

a) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x+18} - \sqrt{x+2}$ b) $\sqrt{x+20} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+11}$

a) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+11} = \sqrt{x-4} - \sqrt{x-1}$ b) $\sqrt{x+14} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}$

5) Die Darstellung von Daten in grafischer und tabellarischer Form sollte immer wieder vorkommen, wobei auch über die Sinnhaftigkeit der Darstellung reflektiert werden sollte:



860 Die folgende Aufgabe „MÜLL“ stammt aus der PISA-Aufgabensammlung:

Als Hausaufgabe zum Thema Umwelt sammelten Schüler/innen Informationen über die Dauer des natürlichen Abbaus von verschiedenen Müllarten, die Leute wegwerfen:

Müllart	Dauer des natürlichen Abbaus
Bananenschalen	1-3 Jahre
Orangenschalen	1-3 Jahre
Kartonschachteln	0,5 Jahre
Kaugummi	20-25 Jahre
Zeitungen	Wenige Tage
Styroporbecher	Über 100 Jahre

860 Die Darstellung von 100 Jahren und wenigen Tagen passt nicht zusammen in ein Balkendiagramm.

Ein Schüler hat vor, diese Ergebnisse in einem Balkendiagramm darzustellen. Gib eine Begründung an, warum ein Balkendiagramm zur Darstellung dieser Daten ungeeignet ist.

Betrachtet man die vorgeschlagenen Aufgaben, sieht man, dass mit einem relativ kleinen Aufwand die SchülerInnen bereits ab der ersten Klasse (fast alle vorgestellten Beispiele stammen aus einem Lehrbuch für die erste Klasse, dessen LehrerInnenband im Spätherbst 2007 erhältlich sein wird) an die bei Pisa, Bildungsstandards und Aufnahmeprüfungen geforderten Leistungen herangeführt werden können.

Literatur

- 1) Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe:
www.gemeinsamlernen.at/index2.asp
- 2) GÖTZ, S. u. REICHEL, H.-C.: Mathematik Lehrbuch 6. öbvht Wien 2005
- 3) Pisa-Aufgaben: www.pisa-austria.at/pisa2003/testinstrumente/lang/index_anhang.htm
- 4) REICHEL, H.-C. u. RESEL, R.: Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung. In Didaktikhefte Heft 14, Dez. 2002, S.85-100
- 5) Tests für Fachhochschulen: www.fachhochschulen.com/

Anschrift des Verfassers:

Günter HANISCH
Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Zi. 415, Nordbergstraße 15, 1090 Wien
guenter.hanisch@univie.ac.at